



TITLE:

# ランダム行列理論とメゾスコピック系

AUTHOR(S):

今村, 卓史

---

CITATION:

今村, 卓史. ランダム行列理論とメゾスコピック系. 物性研究 2007, 88(6): 773-811

ISSUE DATE:

2007-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110879>

RIGHT:

講義ノート

## ランダム行列理論とメゾスコピック系

東京大学 生産技術研究所 基礎系部門 今村 卓史\*

(2007 年 8 月 6 日受理)

ランダム行列とは、乱数を要素に持つ行列であり、物理学において 1950 年代に Wigner によって導入された。それ以来、2 次元量子重力、QCD、量子カオス、メゾスコピック系、非平衡統計力学等、分野やエネルギースケールを超えて幅広く応用されている。

講義では、メゾスコピック系や不規則系への応用の観点からランダム行列理論を解説した。具体的には、まずランダム行列理論とそのユニバーサリティクラスを導入した。つぎに、量子ドットのような 0 次元系について、コンダクタンスやそのゆらぎ等の物理量がランダム行列理論からどのように計算されるか、またそれらがユニバーサリティクラスにどのように依存するかを議論した。

講義で仮定した予備知識は、学部で習う程度の数学と量子力学、それに統計力学のみである。特別な予備知識を仮定することなく、初学者がランダム行列の基礎を理解できるよう心がけた。この講義が、ランダム行列の勉強を本格的に始めるきっかけとなれば幸いである。

なお、この講義は 2006 年 8 月 26 日から 28 日にかけて山中湖村の思学荘で、東京大学生産技術研究所羽田野研究室の夏合宿として行われた。講義ノートの作成に当たっては、文章は町田学、図は佐藤直哉が担当した。

## 1 インTRODクション

## 1.1 Landauer 公式

ランダム行列の理論を説明する前に、まず、ランダム行列が使われる舞台として、メゾスコピック系の電気伝導について復習しておく。

開放量子ドットの電気伝導を考えよう。量子ドットはリード線によって左右の熱浴に接しているとする (図 1)。リード線は擬一次元的であるとする。つまり  $x$  方向 (電子の進行方向) にはマクロな長さを持ち、それと垂直な  $y, z$  方向の長さは微小であるとする。左右の各々のリードにおいて、熱浴のフェルミエネルギー  $E_F$  をもった電子の波動関数は

$$\phi_n(y, z) e^{\pm i k_n x} \quad (1.1)$$

\*E-mail: timamura@iis.u-tokyo.ac.jp

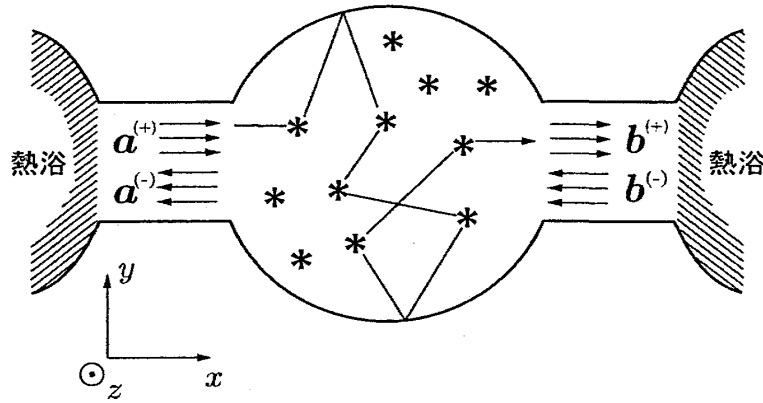


図 1: 開放量子ドット系。

と書くことができる。ただし、リードの擬一次元性 ( $y, z$  方向の長さが微小であること) より、 $x$  軸方向の波数  $k_n$  は離散的な値をとることに注意する。 $n$  はそれをラベルしていて、1 から  $N$  までとるとする。 $(N$  は  $y, z$  方向の長さや  $E_F$  に依存する量である。) リード内の電子状態は、式 (1.1) で表される  $N$  個の離散的な状態に限られる。これらの状態をモード (チャンネル) と呼ぶことにする。電子はこれら  $N$  個のチャンネルを通して熱浴からドット内に入出入りする。

よく知られている Landauer 公式は、チャンネル数  $N = 1$  の場合に電子がドットの左側から右側に通過するときのコンダクタンスを与える。ここでは多チャンネル ( $N > 1$ ) の場合の Landauer 公式を導いてみよう。

図 1 の各モードの波動関数の振幅  $a_i^{(\pm)}$  と  $b_i^{(\pm)}$  の間の関係を、内向波と外向波の関係式として

$$\begin{pmatrix} a^{(-)} \\ b^{(+)} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a^{(+)} \\ b^{(-)} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

と書くことにする。ここで現れる  $S$  行列は次のように書かれる：

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

ただし、 $r$  と  $r'$  は  $N \times N$  の反射行列であり、 $t$  と  $t'$  は  $N \times N$  の透過行列である。 $S$  はユニタリ行列なので<sup>†</sup>  $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$  を満たす。これを使うと

$$\sum_j (|r_{ij}|^2 + |t'_{ij}|^2) = 1, \quad \sum_j (|r_{ji}|^2 + |t_{ji}|^2) = 1 \quad (1.4)$$

<sup>†</sup>波束が保存することより

$$(a^{(-)\dagger}, b^{(+)\dagger}) \begin{pmatrix} a^{(-)} \\ b^{(+)} \end{pmatrix} = (a^{(+)\dagger}, b^{(-)\dagger}) S^\dagger S \begin{pmatrix} a^{(+)} \\ b^{(-)} \end{pmatrix} = (a^{(+)\dagger}, b^{(-)\dagger}) \begin{pmatrix} a^{(+)} \\ b^{(-)} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。これより、 $SS^\dagger = 1$  がわかる。また、(1.2) 式の両辺に時間反転演算子  $\Theta$  (§2.2) を作用させることによって、 $SS^\dagger = 1$  を示すことができる。

がわかる。したがって、

$$\sum_{ij} |t'_{ij}|^2 = \sum_{ij} |t_{ij}|^2 \quad (1.5)$$

を得る。この式の左辺は右から左への電子の透過確率、右辺は左から右への透過確率である。

さて、図1の量子ドットに関して温度  $T = 0$ 、電位差  $V \simeq 0$  を仮定する。左のリードの  $i$  番目のチャンネルを、エネルギー  $E \sim E + dE$  で流れる電流  $dI_L^{(i)}(E)$  を考えよう。電子の速度を  $v(E)$ 、左側の熱浴が従うフェルミ分布関数を  $f_L(E)$ 、リードの電子の状態密度を  $\nu(E)$ 、左のリードの  $i$  番目のチャンネルに入った電子が右側 (のどこかのチャンネル) に透過する確率を  $T_i(E)$ 、と書くことにすると  $dI_L^{(i)}(E)$  は

$$dI_L^{(i)}(E) = ev(E)f_L(E)\nu(E)T_i(E)dE \quad (1.6)$$

と書ける。ここで、 $T_i(E)$  は透過行列  $t_{ij}$  を使って表せる。行列要素  $t_{ij}$  は左側の  $j$  番目のチャンネルに入射した波が右側の  $i$  番目のチャンネルに透過する確率振幅なので ( $|t_{ij}|^2$  はその確率を与える)、

$$T_i(E) = \sum_j |t_{ji}|^2 \quad (1.7)$$

である。また、リード内の電子として1次元理想フェルミ粒子を仮定して、状態密度を

$$\nu(E) = \frac{1}{2\pi\hbar v(E)} \quad (1.8)$$

と書く。右から左への電流も同様に考えると、エネルギー  $E \sim E + dE$  で流れる電流  $dI(E)$  は

$$\begin{aligned} dI(E) &= dI_L(E) - dI_R(E) \\ &= \sum_i dI_L^{(i)}(E) - \sum_i dI_R^{(i)}(E) \\ &= \frac{e}{h} \sum_{ij} (f_L(E)|t_{ij}|^2 - f_R(E)|t'_{ij}|^2) dE \end{aligned} \quad (1.9)$$

と求まる。これより、全電流  $I$  は

$$\begin{aligned} I &= \int dI(E) \\ &= \frac{e}{h} \int dE (f_L(E) - f_R(E)) \sum_{ij} |t_{ij}|^2 \\ &= \frac{e}{h} \Delta\mu \sum_{ij} |t_{ij}|^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる。ここで式(1.5)を用いた。また、 $\Delta\mu$  は左右の熱浴の化学ポテンシャルの差である。電位差は  $V = \Delta\mu/e$  と書けるので、コンダクタンス  $G$  は結局

$$G = \frac{I}{V} = \frac{e^2}{h} \sum_{ij} |t_{ij}|^2 = \frac{e^2}{h} \text{tr } tt^\dagger \quad (1.11)$$

と求まる。これが多チャンネルの場合の Landauer 公式である。

## 1.2 このノートで目指すこと

図1の量子ドットにランダムな不純物が含まれるとき、コンダクタンスの不純物分布に関する統計量を求める必要が出てくる。そこで、ランダム行列理論を用いて Landauer 公式からコンダクタンス  $G$  の統計量を求めることがこのノートの目標である。具体的には  $G$  のサンプル平均  $\langle G \rangle$  と分散  $\text{var } G$  を計算する。驚くべきことに  $\langle G \rangle$  や  $\text{var } G$  には系の詳細に依存しない普遍的な量が現れる。

さて、Landauer 公式によるとコンダクタンスは  $S$  行列の要素を用いて計算される。したがって、集団平均に着目することになると、我々は散乱行列の確率分布  $P(S)$  を求める必要がある。分布  $P(S)$  が求まれば、コンダクタンスのサンプル平均  $\langle G \rangle$  は

$$\langle G \rangle = \frac{e^2}{h} \int \text{tr } tt^\dagger P(S) dS, \quad (1.12)$$

分散は

$$\text{var } G = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2, \quad (1.13)$$

として計算できる。ここで次の2つの疑問点が出てくる。

- $P(S)$  をどのように選ぶか？
- 物理量をどのように計算するか？

前者については、系がランダムといっても  $S$  をただランダムに選べばよいわけではない。まず初めに、 $S$  はユニタリ行列でなければならない。また、分布  $P(S)$  には系の対称性がきちんと反映されなければならない。ドット内には不純物があるので、系には並進対称性、回転対称性、反転対称性などはない。しかし、時間反転対称性やスピン回転対称性がある場合がある。その場合には  $P(S)$  を求めるときにこれらの対称性を考慮しなければならない。

後者の疑問は、 $P(S)$  が求まったとして、式 (1.12) や式 (1.13) が具体的にどう計算されるのかという問題である。実はこの計算は実行できることがわかり、系によらない普遍的な量が得られる。

このノートでは、§2 と §3 でランダム行列の基礎を解説する。その後、§4 で1番目の疑問に答え、§5 で2番目の疑問に答えることで、ランダム行列理論を用いてコンダクタンスを計算する。

## 2 ハミルトニアン の 対称性

この節では、ハミルトニアン の 2 つの対称性とスピン回転対称性、時間反転対称性を数式で表現する。

### 2.1 スピン回転対称性

ハミルトニアン  $H$  を

$$H = H_N \otimes H_2 \quad (2.1)$$

と書く。 $H_N$  は実空間の  $N \times N$  行列、 $H_2$  はスピン空間の  $2 \times 2$  行列とする。したがって、 $H$  は  $2N \times 2N$  のエルミート行列である。

スピン空間の回転演算子  $R_s^{(k)}(\theta)$  は次のように書ける：

$$R_s^{(k)}(\theta) = 1_N \otimes \exp(-iS_k\theta), \quad S_k = \frac{1}{2}\sigma_k \quad k \in (x, y, z). \quad (2.2)$$

ただし、 $1_N$  は  $N \times N$  の単位行列、 $\sigma_k$  はパウリ行列<sup>†</sup>である。ハミルトニアン  $H$  がスピン空間で回転対称であるときには、次のように  $H$  と  $S_k$  が交換することがわかる。

$$R_s^{(k)}(\theta)H = HR_s^{(k)}(\theta) \iff [S_k, H] = 0. \quad (2.3)$$

### 2.2 時間反転対称性

次に、時間を反転させる演算子  $\Theta$  を考えよう。 $\Theta$  の具体的な形についてはすぐにはわからないが、物理的な意味やスピン空間での回転演算子  $R_s^{(k)}(\theta)$  との類推から、 $\Theta$  の性質を探っていくことにしよう。

$\Theta$  は時間反転演算子であるから、粒子の運動をビデオテープに撮っておいて、それを巻き戻しながら再生するような操作のはずである (図 2)。この物理的な意味を考えて、まず、位置  $x$  と運動量  $p$  に関して  $\Theta$  に以下のことを要請する。 $|\alpha\rangle$  を系のある状態とすると、 $\Theta$  は

$$\Theta \hat{x} |\alpha\rangle = \hat{x} \Theta |\alpha\rangle, \quad \Theta \hat{p} |\alpha\rangle = -\hat{p} \Theta |\alpha\rangle, \quad (2.4)$$

つまり

$$\Theta \hat{x} \Theta^{-1} = \hat{x}, \quad \Theta \hat{p} \Theta^{-1} = -\hat{p} \quad (2.5)$$

を満たすとする。時間反転しても粒子の位置は変わらないが、運動の向きが逆になるはずだからである。

†

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ビデオテープを巻き戻す

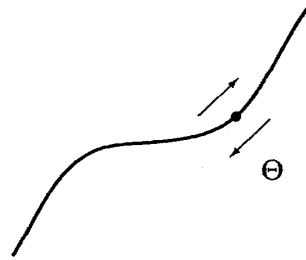


図 2: 時間反転すると反対方向に運動する。

また、 $R_s^{(k)}(\theta)$  はユニタリー演算子であった。実空間での回転や反転の操作を考えても、対応する演算子はユニタリーである。そこで時間の反転についても、対応する演算子  $\Theta$  が仮にユニタリーであることを要請してみよう。

ところが、上の2つの要請は互いに矛盾していることが次のようにしてわかる。1番目の要請 (2.4) を用いると

$$\Theta[\hat{x}, \hat{p}_x]|\alpha\rangle = \Theta(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})|\alpha\rangle = -[\hat{x}, \hat{p}_x]\Theta|\alpha\rangle \quad (2.6)$$

を得る。しかし2番目の要請 ( $\Theta$  がユニタリー演算子という要請) を用いると、ユニタリー演算子は当然線形演算子なので、

$$\Theta[\hat{x}, \hat{p}_x]|\alpha\rangle = \Theta i\hbar |\alpha\rangle = i\hbar \Theta |\alpha\rangle = [\hat{x}, \hat{p}_x]\Theta |\alpha\rangle \quad (2.7)$$

を得る。この2つは符号が異なる。 $|\alpha\rangle$  はどんな状態でもよいのだから、2つの要請のうち1つを捨てなければならない。そこで、我々は1番目の要請を保持し、2番目の要請を捨てることにする。

演算子  $\Theta$  を表すために、まず複素共役をとる演算子  $K$  を考える。状態  $|\alpha\rangle = c_1 |\beta_1\rangle + c_2 |\beta_2\rangle$  に対し、 $K$  は次のように作用する：

$$K|\alpha\rangle = c_1^* |\beta_1\rangle + c_2^* |\beta_2\rangle. \quad (2.8)$$

なお、 $K$  は線形演算子ではなく、その作用は基底のとり方に依存するので注意が必要である。ここで時間反転演算子が、あるユニタリー演算子  $U$  と複素共役演算子  $K$  との積で

$$\Theta = UK \quad (2.9)$$

と書けるとする。こうすると式 (2.7) は

$$\Theta[\hat{x}, \hat{p}_x]|\alpha\rangle = \Theta i\hbar |\alpha\rangle = -i\hbar \Theta |\alpha\rangle = -[\hat{x}, \hat{p}_x]\Theta |\alpha\rangle \quad (2.7')$$

と変更され、式 (2.6) と矛盾しない。ただし  $\Theta$  はユニタリー演算子ではなく、線形演算子にすらなっていないことに注意しておく。

時間反転演算子の形がわかったので、 $\Theta$  の性質について考えていこう。

### 2.2.1 $\Theta$ に関する性質-内積

$\Theta$ がユニタリー演算子でないことを表す端的な例として、時間反転した状態同士の内積について考えてみる。状態  $|\alpha\rangle$  と  $|\beta\rangle$  に対して、それぞれを時間反転した状態を

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta |\alpha\rangle, \quad |\tilde{\beta}\rangle = \Theta |\beta\rangle \quad (2.10)$$

とする。 $\Theta$ を作用させるためには両者を同じ基底で展開しておく必要がある：

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}\rangle &= \Theta \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i \langle a_i|\alpha\rangle^* U |a_i\rangle, \\ |\tilde{\beta}\rangle &= \Theta \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\beta\rangle = \sum_i \langle a_i|\beta\rangle^* U |a_i\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

すると、

$$\langle \tilde{\beta} | = \sum_j \langle a_j|\beta\rangle \langle a_j| U^\dagger \quad (2.12)$$

なので、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\beta} | \tilde{\alpha} \rangle &= \sum_{ij} \langle a_i|\alpha\rangle^* \langle a_j|\beta\rangle \langle a_j|a_i\rangle = \sum_{ij} \langle \alpha|a_i\rangle \langle a_j|\beta\rangle \delta_{ij} \\ &= \langle \alpha|\beta\rangle = \langle \beta|\alpha\rangle^* \end{aligned} \quad (2.13)$$

となることがわかる。(通常のユニタリー演算子では内積は保存することに注意しておく。)

### 2.2.2 $\Theta$ に関する性質-実空間に対する作用

次に、時間反転演算子の実空間に対する作用を考える。位置演算子  $\hat{x}$  に対して  $\Theta$  を作用させる。まず、

$$\hat{x}\Theta|x'\rangle \stackrel{(2.4)}{=} \Theta\hat{x}|x'\rangle = x'\Theta|x'\rangle \quad (2.14)$$

より

$$\Theta|x'\rangle = |x'\rangle \quad (2.15)$$

がわかる。ただし、位相因子を1とした。これを用いると、ハミルトニアン  $H$  の時間反転について

$$\begin{aligned} \langle x'' | \Theta H \Theta^{-1} | x' \rangle &= \langle x'' | \Theta H \Theta^{-1} \Theta | x' \rangle = \langle x'' | \Theta \left[ \sum_{x_1} |x_1\rangle \langle x_1| \right] H | x' \rangle \\ &= \langle x'' | \left[ \sum_{x_1} \langle x_1 | H | x' \rangle^* | x_1 \rangle \right] = \langle x'' | H | x' \rangle^* \end{aligned} \quad (2.16)$$



を得る。一般に、固有値が実数の演算子  $\hat{A}$  が時間反転対称 ( $\Theta \hat{A} \Theta^{-1} = \hat{A}$ ) なとき、その固有状態  $|a\rangle$  に対して、

$$\Theta |a\rangle = |a\rangle \quad (2.17)$$

が言える。したがって、

$$\langle a'' | \Theta H \Theta^{-1} | a' \rangle = \langle a'' | H | a' \rangle^* \quad (2.18)$$

である。

一方、演算子  $\hat{p}$  は時間反転対称ではなく、 $\hat{p}$  については式 (2.18) のような関係は成り立たない。実際に、

$$\hat{p} \Theta |p'\rangle = -\Theta \hat{p} |p'\rangle = -p' \Theta |p'\rangle \quad (2.19)$$

より

$$\Theta |p'\rangle = e^{i\delta} |-p'\rangle \quad (2.20)$$

となり ( $e^{i\delta}$  は位相因子)、 $\hat{x}$  の場合の議論は成り立たない。

### 2.2.3 $\Theta$ に関する性質—スピン空間に対する作用

今度は時間反転演算子  $\Theta$  のスピン空間に対する作用を考える。スピン演算子  $S_i$  ( $i = x, y, z$ ) はスピン空間の回転の生成子である。スピン空間の回転の向きは、時間反転操作というビデオテープを巻き戻す操作をほどこすと逆向きになるという物理的要請から

$$\Theta S_i \Theta^{-1} = -S_i \quad (2.21)$$

を満たすとする。実際、上の式および式 (2.9) のもとで交換関係  $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$  が保存し、式 (2.6)、(2.7) のような矛盾は生じない。

$z$  軸を量子化軸にとり、スピンの上を向いた状態を  $|+\rangle$ 、下を向いた状態を  $|-\rangle$  と書くことにしよう。このとき図 3 のように、上向きスピンを  $y$  軸のまわりに  $\theta_y$  だけ回転させ、さらにそれを  $z$  軸のまわりに  $\theta_z$  だけ回転させた状態  $|n, +\rangle$  を考える：

$$|n, +\rangle = e^{-i\theta_z S_z} e^{-i\theta_y S_y} |+\rangle. \quad (2.22)$$

この状態に時間反転演算子  $\Theta$  を作用させてみる。まず式 (2.20) の類推から、

$$\Theta |+\rangle = e^{i\delta} |-\rangle \quad (2.23)$$

となる。この式と式 (2.9)、(2.21) を用いると、

$$\Theta |n, +\rangle = e^{i\delta} |n, -\rangle \quad (2.24)$$

となる。ただし、 $|n, -\rangle = e^{-i\theta_z S_z} e^{-i\theta_y S_y} |-\rangle$  である。

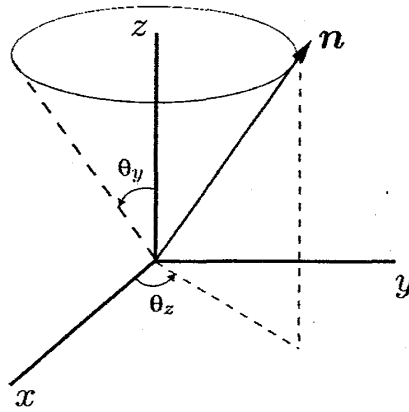


図 3: スピンを回転させる。

以下では、 $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) という表示を用いることにする。 $|n, -\rangle$  は次のように計算することができる：

$$\begin{aligned}
 |n, -\rangle &= e^{-i\frac{\theta_z}{2}\sigma_z} e^{-i\frac{\theta_y+\pi}{2}\sigma_y} |+\rangle \\
 &= \left( \cos \frac{\theta_z}{2} - i\sigma_z \sin \frac{\theta_z}{2} \right) (-i\sigma_y) e^{-i\frac{\theta_y}{2}\sigma_y} |+\rangle \\
 &= (-i\sigma_y) \left( \cos \frac{\theta_z}{2} + i\sigma_z \sin \frac{\theta_z}{2} \right) e^{-i\frac{\theta_y}{2}\sigma_y} |+\rangle \\
 &= (-i\sigma_y) K \left( \cos \frac{\theta_z}{2} - i\sigma_z \sin \frac{\theta_z}{2} \right) e^{-i\frac{\theta_y}{2}\sigma_y} |+\rangle \\
 &= (-i\sigma_y) K e^{-i\frac{\theta_z}{2}\sigma_z} e^{-i\frac{\theta_y}{2}\sigma_y} |+\rangle \\
 &= (-i\sigma_y) K |n, +\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

ここで、3行目から4行目への変形では、 $\sigma_z$  と  $i\sigma_y$  が実数行列であることを使っている。式(2.25)から

$$\Theta = e^{i\delta} (-i\sigma_y) K \tag{2.26}$$

と書くことができる。 $\delta$ は任意であるから、慣例に従って $\delta = \pi$ とすると、結局、

$$\Theta = -e^{-i(\pi/2)\sigma_y} K = i\sigma_y K \tag{2.27}$$

を得る。

以上§2.2.2と§2.2.3より、ハミルトニアン $H$ の時間反転について次のことが言える。 $H$ の行列表示を得る際には、実空間の基底については時間反転対称なエルミート演算子(たとえば $\hat{x}$ )の固有状態をとり、スピン空間についてはパウリ行列を用いた表示をとることにする。そのとき、ハミルトニアンが時間反転対称ならば、 $H = \Theta H \Theta^{-1}$ なので、

$$H = \Theta H \Theta^{-1} = \tau H^* \tau^{-1} \tag{2.28}$$

が成り立つ。ただし、

$$\tau = 1_N \otimes i\sigma_y \quad (2.29)$$

である。

### 3 ランダム行列アンサンブル

以下ではランダム行列の基本的な3つのユニバーサリティクラスを紹介する。時間反転対称性 (TR) の有無とスピン回転対称性 (SR) の有無により、ランダム行列はユニタリー、オーソゴナル、シンプレクティックという3種類に分類される。

$\beta$  を、オーソゴナルの場合は1、ユニタリーの場合は2、シンプレクティックの場合は4をとる変数とすると、エネルギー固有値  $\{x_i\}$  を持つランダム行列ハミルトニアン  $H$  の分布  $P_\beta(H)$  とその固有値分布  $P_\beta(\{x_i\})$  は

$$\begin{aligned} P_\beta(H) dH &= \frac{1}{Z_\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \text{tr } H^2\right) dH \\ P_\beta(\{x_i\}) \prod_i dx_i &= \frac{1}{Z'_\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_i x_i^2\right) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_i dx_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。 $Z_\beta$  と  $Z'_\beta$  は規格化定数である。固有値分布を

$$P(\{x_i\}) \prod_i dx_i = \frac{1}{Z'_\beta} \exp\left[-\beta \left(\frac{1}{2} \sum_i x_i^2 - \ln |x_i - x_j|\right)\right] \prod_i dx_i \quad (3.2)$$

と書き直すと、これが対数的に反発しあう1次元粒子系の分配関数になっていることがわかる。

ランダム行列のクラスと系の対称性との関係は、表1のようにまとめることができる。以下、これら3種類のランダム行列を導入する。

	$\beta$	TR	SR
Orthogonal	1	○	○
Unitary	2	×	×○
Symplectic	4	○	×

表 1: 系の対称性とランダム行列のユニバーサリティクラスとの対応。

#### 3.1 ユニタリークラス [TR ×, SR ×○]

まずはじめに、時間反転対称性 (TR) もスピン回転対称性 (SR) もない場合を考える。このときには、ハミルトニアンは一般にエルミートであるという以上のことは言えない。し

たがって、式 (2.1) のハミルトニアン  $H$  を

$$H = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} + iy_{1,2} & \cdots & x_{1,2N} + iy_{1,2N} \\ x_{1,2} - iy_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,2N} + iy_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,2N} - iy_{1,2N} & x_{2,2N} - iy_{2,2N} & \cdots & x_{2N,2N} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

と書く。

一方、時間反転対称性はないがスピン回転対称性がある場合は、ハミルトニアン  $H$  に式 (2.3) の条件が課され、

$$H = H_N \otimes 1_2 \quad (3.4)$$

と書ける。ただし  $H_N$  は  $N \times N$  をエルミート行列である。このように時間反転対称性がないときには、スピン回転対称性の有無にかかわらず、ハミルトニアンの形はエルミートである<sup>§</sup>。スピン回転対称性の有無はスピン空間に関する縮退としてのみ反映される。このような対称性クラスのことをユニタリークラスと呼ぶ。

我々はここで、式 (3.3) で表される行列の集団として、ガウシアン・ユニタリー・アンサンブル (Gaussian Unitary Ensemble (GUE)) というランダム行列を導入する。GUE とは式 (3.3) の行列要素  $\{x_{i,j}\}$  と  $\{y_{i,j}\}$  が各々ガウス分布をする独立な乱数である行列の集団であり、行列  $H$  の分布関数は次のようになる：

$$\begin{aligned} P_2(H) dH &= \frac{1}{Z_2} \exp \left( - \sum_i x_{i,i}^2 - 2 \sum_{i < j} x_{i,j}^2 - 2 \sum_{i < j} y_{i,j}^2 \right) \prod_i dx_{i,i} \prod_{i < j} dx_{i,j} dy_{i,j} \\ &= \frac{1}{Z_2} \exp (-\text{tr } H^2) dH. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ただし、 $Z_2$  は規格化定数である。式 (3.5) の測度はユニタリー行列に関して不変である。

$H$  の固有値  $x_1, x_2, \dots, x_{2N}$  ( $x_1 > x_2 > \cdots > x_{2N}$ ) の分布を考えるために、

$$H = UXU^\dagger, \quad X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_{2N}) \quad (3.6)$$

と対角化する。ただし、 $U$  は  $2N \times 2N$  のユニタリー行列である。 $H$  から  $\{x_i\}$  への変換のヤコビアンを  $J_2(x)$  とおくと、固有値分布  $P_2(\{x_i\})$  は

$$P_2(\{x_i\}) \prod_i dx_i = \frac{1}{Z'_2} \exp \left( - \sum_{i=1}^{2N} x_i^2 \right) J_2(x) \prod_i dx_i \quad (3.7)$$

と書ける。ただし、 $Z'_2$  は規格化定数である。以下、ヤコビアンを計算する。(計算方法は文献 [5] に基づいている。)

<sup>§</sup>ただし、式 (3.3) のハミルトニアンは、全ての非対角要素の虚部を、実部と同じ分布をもつ乱数で与えていることに注意する。このために、ハミルトニアンが §3.2 の GOE や §3.3 の GSE で表される系において、磁場をかけるなどして時間反転対称性を破っても、ハミルトニアンがただちに GUE で表せるわけではない。

まず、ある変数  $y_1, y_2, \dots, y_N$  から別の変数  $z_1(\{y_i\}), z_2(\{y_i\}), \dots, z_N(\{y_i\})$  への変換を考えて、外積の間の

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N = J(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N, \quad J(y) = \det \left[ \frac{dz_i}{dy_i} \right] \quad (3.8)$$

という関係に着目する。これは次のようにして示すことができる:

$$\begin{aligned} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N &= \sum_{j_1, \dots, j_N} \frac{dz_1}{dy_{j_1}} \dots \frac{dz_N}{dy_{j_N}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_N) \in \sigma(N)} \frac{dz_1}{dy_{j_1}} \dots \frac{dz_N}{dy_{j_N}} \text{sgn}(j_1, \dots, j_N) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= \det \left[ \frac{dz_i}{dy_i} \right] dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ただし、 $\sigma(N)$  は  $\{1, 2, \dots, N\}$  の置換である。

さて、ハミルトニアン  $H = UXU^\dagger$  において行列要素を微小変化させた行列  $dH$  を考える:

$$dH = dUXU^\dagger + U dXU^\dagger + UX dU^\dagger. \quad (3.10)$$

ここで、 $U^\dagger dHU$  に対して外積を考えると

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{2N} (U^\dagger dHU)_{ii} \bigwedge_{i<j}^{2N} \text{Re}(U^\dagger dHU)_{ij} \bigwedge_{i<j}^{2N} \text{Im}(U^\dagger dHU)_{ij} &= [U \text{ の関数}] \\ &\times \bigwedge_{i=1}^{2N} dH_{ii} \bigwedge_{i<j}^{2N} \text{Re}(dH)_{ij} \bigwedge_{i<j}^{2N} \text{Im}(dH)_{ij} \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。この式の右辺が式 (3.5) の  $dH$  である。ところで、 $U^\dagger U = 1$  より  $dU^\dagger U = -U^\dagger dU$  であることを用いると、式 (3.10) から

$$\begin{aligned} U^\dagger dHU &= U^\dagger dUX + dX + X dU^\dagger U \\ &= U^\dagger dUX + dX - XU^\dagger dU \end{aligned} \quad (3.12)$$

がわかる。したがって、 $i < j$  として

$$\begin{aligned} \text{Re}(U^\dagger dHU)_{ij} &= (x_j - x_i) \text{Re}(U^\dagger dU)_{ij} \\ \text{Im}(U^\dagger dHU)_{ij} &= (x_j - x_i) \text{Im}(U^\dagger dU)_{ij} \\ (U^\dagger dHU)_{ii} &= dx_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

を得る。これを式 (3.11) に代入すると右辺は

$$\prod_i dx_i \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \times [U \text{ の関数}] \quad (3.14)$$

となる。この  $\prod_i dE_i$  が式 (3.7) の  $\prod_i dx_i$  である。以上から  $\prod_i dx_i \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \propto dH$  となり、 $U$  の関数の部分を除くとヤコビアンは

$$J_2(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \quad (3.15)$$

と求まる。したがって式 (3.7) より、

$$P_2(\{x_i\}) dx_1 \cdots dx_{2N} = \frac{1}{Z_2} \exp \left( - \sum_{i=1}^{2N} x_i^2 \right) \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 dx_1 \cdots dx_{2N} \quad (3.16)$$

の形で固有値分布が求まる。

### 3.2 オーソゴナルクラス [TR ○, SR ○]

次に、時間反転対称性 (TR) もスピン回転対称性 (SR) もある場合を考える。スピン回転対称性 (式 (2.3)) により、式 (2.1) のハミルトニアン  $H$  は

$$H = H_N \otimes 1_2 \quad (3.17)$$

と書ける。つまりスピンに関して状態は縮退している。また、時間反転対称性より

$$\tau H^* \tau^{-1} = H \quad (\tau = 1_N \otimes i\sigma_y), \quad (3.18)$$

つまり、 $H_N^* = H_N$  が満たされている。したがって、 $H_N$  は実対称行列であることがわかる。すると、この場合のハミルトニアンは一般に下の形に書ける：

$$H_N = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,N} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,N} & x_{2,N} & \cdots & x_{N,N} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

式 (3.3) と比べると、対称性のために  $y_{i,j} \equiv 0$  という制限が課されたことがわかる。このような対称性クラスのことをオーソゴナルクラスと呼ぶ。

ここで我々は行列 (3.19) の要素  $\{x_{i,j}\}$  が各々ガウス分布をする独立な乱数であるようなランダム行列を考える。このようなランダム行列は、ガウシアン・オーソゴナル・アンサンブル (Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)) と呼ばれる。

GOE の分布関数は次のようになる：

$$\begin{aligned} P_1(H_N) dH_N &= \frac{1}{Z_1} \exp \left( - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_{i,i}^2 - \sum_{i<j} x_{i,j}^2 \right) \prod_i dx_{i,i} \prod_{i<j} dx_{i,j} \\ &= \frac{1}{Z_1} \exp \left( - \frac{1}{2} \text{tr } H_N^2 \right) dH_N. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで  $Z_1$  は規格化定数である。式 (3.20) の測度は直交行列に関して不変である。

$H_N$  の固有値  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ( $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ ) の分布を考えるために、

$$H_N = O X O^\dagger, \quad X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.21)$$

と対角化する。ただし、 $O$  は  $N \times N$  の直交行列である。変換のヤコビアンを  $J_1(x)$  とすると固有値分布  $P_1(\{x_i\})$  は

$$P_1(\{x_i\}) dx = \frac{1}{Z'_1} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) J_1(x) dx \quad (3.22)$$

と書ける。ただし、 $Z'_1$  は規格化定数である。ヤコビアンの計算は §3.1 と同様にできて、

$$J_1(x) = \prod_{i < j} |x_i - x_j| \quad (3.23)$$

と求まる。なお、今は  $x_1 > x_2 > \dots > x_N$  としているので絶対値の中の符号は一定だが、一般に入れかわった場合のために絶対値をつけておく。したがって、

$$P_1(\{x_i\}) dx_1 \dots dx_N = \frac{1}{Z'_1} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \prod_{i < j} |x_i - x_j| dx_1 \dots dx_N \quad (3.24)$$

の形で固有値分布が求まる。GUE と比べると、行列要素に虚部がないために式 (3.13) の第 2 式の寄与がなく、そのために式 (3.15) と式 (3.23) とが違ってくる。

### 3.3 シンプレクティッククラス [TR ○, SR ×]

最後に、時間反転対称性 (TR) はあるがスピン回転対称性 (SR) はない場合を考える。例えばスピン軌道相互作用 ( $V_{\text{SO}} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\ell}$ ) のある系はこのクラスに属する。この場合はどのようなランダム行列が得られるであろうか。

時間反転対称性のある系では、すべての固有値が 2 重に縮退することが知られている。(Kramers 縮退<sup>†</sup>)。したがって、縮退している 2 個の状態を 1 組として扱いたい。そこで、すこし唐突ではあるが、ここで四元数  $q$  を導入する (四元数の定義は文献 [4] に基づいている。):

$$\begin{aligned} q &= q^{(0)} e_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \\ &= q^{(0)} e_0 + q^{(1)} e_1 + q^{(2)} e_2 + q^{(3)} e_3. \end{aligned} \quad (3.25)$$

ただし、 $q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}$  は通常の実数で、

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

<sup>†</sup> $H$  の固有状態  $|\alpha\rangle$  に対し、 $|\alpha\rangle$  と  $\Theta|\alpha\rangle$  が同じ固有値を持つことから来る縮退 (L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Quantum Mechanics" (Pergamon Press Ltd., 1977) §60)。

である。\$2 \times 2\$ 行列の 4 つの要素から、\$q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}\$ という 4 つの複素数への変数変換になっている。四元数の共役 (\$\bar{q}\$) と複素共役 (\$q^\*\$) は次のように定義される:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= q^{(0)}e_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = q^{(0)}e_0^\dagger + q^{(1)}e_1^\dagger + q^{(2)}e_2^\dagger + q^{(3)}e_3^\dagger, \\ q^* &= q^{(0)*}e_0 + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

複素数の場合の共役とは違うことに注意してほしい。四元数の共役は、\$e\_0, e\_1, e\_2, e\_3\$ のエルミート共役をとる操作、四元数の複素共役は、\$q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}\$ の複素共役をとる操作である。両方の操作を同時にとることによって初めて、\$2 \times 2\$ 行列全体のエルミート共役をとったことになる。

任意の \$2N \times 2N\$ 行列 \$Q\$ は \$N \times N\$ の四元数行列の形

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & q_{NN} \end{pmatrix}\tag{3.28}$$

で書ける。行列の複素共役と転置については次のことがわかる:

$$\begin{aligned}(Q^\dagger)_{ji} &= \bar{q}_{ij}^*, \\ (Q^T)_{ji} &= e_2 \bar{q}_{ij} e_2^{-1}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

また、\$Q\$ の双対 \$Q^R\$ を次のように定義する:

$$(Q^R)_{ji} = e_2 (Q^T)_{ji} e_2^{-1} = \bar{q}_{ij}.\tag{3.30}$$

式 (3.29) の第 2 式は

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} q_{ij}^{(0)} + i q_{ij}^{(1)} & q_{ij}^{(2)} + i q_{ij}^{(3)} \\ -q_{ij}^{(2)} + i q_{ij}^{(3)} & q_{ij}^{(0)} - i q_{ij}^{(1)} \end{pmatrix}\tag{3.31}$$

に対して

$$\begin{aligned}e_2 \bar{q}_{ij} e_2^{-1} &= q_{ij}^{(0)} e_0 + q_{ij}^{(1)} e_1 - q_{ij}^{(2)} e_2 + q_{ij}^{(3)} e_3 \\ &= \begin{pmatrix} q_{ij}^{(0)} + i q_{ij}^{(1)} & -q_{ij}^{(2)} + i q_{ij}^{(3)} \\ q_{ij}^{(2)} + i q_{ij}^{(3)} & q_{ij}^{(0)} - i q_{ij}^{(1)} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.32}$$

となることから確認できる。\$Q\$ がエルミートのとき、

$$q_{ij} = \bar{q}_{ji}^*\tag{3.33}$$

が満たされる。また、

$$q_{ij} = \bar{q}_{ji}\tag{3.34}$$



であるとき、 $Q^R = Q$ であり、 $Q$ は自己双対 (self dual) であるという。

さて、 $2N \times 2N$  のハミルトニアン  $H$  を  $N \times N$  の四元数行列で表して、対称性を考えてみる。 $H$  を四元数で表したときの要素を  $(H)_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) と書くとハミルトニアンがエルミートであることより

$$(H)_{ij} = \overline{(H)_{ji}}^* \quad (3.35)$$

である。また、ハミルトニアンがエルミートであることと、式 (3.18) の時間反転対称性を使うと

$$H = \tau H^T \tau^{-1} \quad (3.36)$$

と書けるが、これを四元数行列要素と用いて書き直してみると  $H$  は自己双対であることがわかる:

$$(H)_{ij} = (\tau H^T \tau^{-1})_{ij} = e_2 (H^T)_{ij} e_2^{-1} = \overline{(H)_{ji}}. \quad (3.37)$$

ここで  $i\sigma_y = e_2$  を使っている。したがって、式 (3.35) と (3.37) より、

$$(H)_{ij} = \overline{(H)_{ji}} = (H)_{ji}^* \quad (3.38)$$

であることもわかる。四元数を使ってエルミート共役の操作を式 (3.27) の 2 段階に分けたことによって、時間反転対称性を式 (3.38) のような簡単な形で表せるようになった。式 (3.38) のような性質を持つ行列は、実四元数行列と呼ばれる。実際に、式 (3.38) を満たす行列を

$$(H)_{ij} = h_{ij}^{(0)} e_0 + h_{ij}^{(1)} e_1 + h_{ij}^{(2)} e_2 + h_{ij}^{(3)} e_3 \quad (3.39)$$

と書くと、 $h_{ij}^{(0)}$  は実対称行列であり、 $h_{ij}^{(1)}$ ,  $h_{ij}^{(2)}$ ,  $h_{ij}^{(3)}$  は実反対称行列になる。このような自己双対エルミートの対称性を持つクラスのことをシンプレクティッククラスと呼ぶ。また、行列要素  $h_{ij}^{(0)}$ ,  $h_{ij}^{(1)}$ ,  $h_{ij}^{(2)}$ ,  $h_{ij}^{(3)}$  がそれぞれ独立にガウス分布する乱数であるとき、このランダム行列のことをガウシアン・シンプレクティック・アンサンブル (Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)) と呼ぶ。

GSE の分布関数は次のようになる:

$$\begin{aligned} P_4(H) dH &= \frac{1}{Z_4} \exp \left( -2 \sum_{i=1}^N h_{ii}^{(0)2} \right) \exp \left( -4 \sum_{i < j}^N \left( h_{ij}^{(1)2} + h_{ij}^{(2)2} + h_{ij}^{(3)2} \right) \right) dH \\ &= \frac{1}{Z_4} \exp (-2 \text{tr } H^2) dH. \end{aligned} \quad (3.40)$$

$H$  の固有値  $x_1, x_2, \dots, x_{2N}$  はそれぞれ 2 重に縮退している (Kramers 縮退)。そこで、それぞれの固有値を次のように番号付けする:

$$x_1 = x_{N+1} > x_2 = x_{N+2} > \dots > x_N = x_{2N}. \quad (3.41)$$

$H$  の固有値の分布は §3.1 や §3.2 と同様にして求めることができ、

$$P_4(\{x_i\})dx_1 \dots dx_N = \frac{1}{Z'_4} \exp \left( -2 \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \prod_{i < j} (x_i - x_j)^4 dx_1 \dots dx_N \quad (3.42)$$

となる。GSE では 4 つの実数の分布を考えるために、ヤコビアンに 4 乗が現れる。

以上をまとめると、3 つのユニバーサリティクラスの違いは、固有値分布には式 (3.1) のように  $\beta$  の違いとして現れる。

## 4 ランダム $S$ 行列

§1 で扱った開放量子ドット系に戻ろう。この系のコンダクタンスを計算する準備は整った。ここでは  $S$  行列の分布  $P(S)$  を計算し、§1.2 の 1 番目の疑問に答える。この章の議論は文献 [6] に基づいている。

結論を先に述べると、ドットの部分のハミルトニアンをランダム行列として出発しても、ドットの部分の  $S$  行列がランダム行列であるとして出発しても、全系の  $S$  行列の分布  $P(S)$  は

$$P(S) = |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-(2\beta N + 2 - \beta)} \quad (4.1)$$

で与えられることがわかる。ここで  $\bar{S}$  はある定行列である。式 (4.1) で与えられる確率分布の性質として、 $S$  の平均は  $\bar{S}$  となることが知られている:

$$\bar{S} = \int S P(S) dS. \quad (4.2)$$

このような  $P(S)$  はポアソン・カーネルと呼ばれる。

### 4.1 開放量子ドット系の $S$ 行列—ハミルトニアンからのアプローチ

図 1 にあるような開放量子ドット系のハミルトニアン  $H_{\text{tot}}$  を次のように与える:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{a=1}^{2N} |a\rangle E_F \langle a| + \sum_{\mu, \nu=1}^M |\mu\rangle H_{\mu\nu} \langle \nu| + \sum_{\mu, a} (|\mu\rangle W_{\mu a} \langle a| + |a\rangle W_{\mu a}^* \langle \mu|). \quad (4.3)$$

ここで、第一項はリード線のハミルトニアンを表す。§1.1 で説明したように、各チャンネルはフェルミエネルギー  $E_F$  を持つ。チャンネルの個数は左右のリードをあわせて  $2N$  である。第 2 項の  $M \times M$  行列  $H$  は量子ドットのハミルトニアンを表す。ただし  $M$  は量子ドットが孤立していた場合のドット内の状態数である。第 3 項の  $M \times 2N$  行列  $W$  はドットとリードとの結合部を表す。ドット内は十分カオティックであるとして、 $H$  をランダム行列にする。量子ドットの対称性を表すパラメータ  $\beta$  と、それに対応する行列  $H$  と  $W$ 、 $S$  行列について表 2 にまとめた。

$\beta$	$H$	$W$	$S$
1	実対称	実	ユニタリー+対称
2	エルミート	複素数	ユニタリー
4	自己双対エルミート	実四元数	ユニタリー+自己双対

表 2: ハミルトニアン の 対称性 と 対応する  $W$  行列、 $S$  行列。

このとき、 $S$  行列は  $2N \times 2N$  のユニタリー行列であり、

$$S(E_F) = 1 - 2\pi i W^\dagger (E_F - H + i\pi W W^\dagger)^{-1} W \quad (4.4)$$

と書ける (参考文献 [7])。レゾルベント展開することにより、上式を

$$\begin{aligned} S(E_F) &= 1 + 2\pi i W^\dagger \left( \frac{1}{H - E_F} + \frac{1}{H - E_F} i\pi W^\dagger W \frac{1}{H - E_F} + \dots \right)^{-1} W \\ &= 1 + 2(W^\dagger A W + W^\dagger A W W^\dagger A W + \dots) \\ &= (1 + W^\dagger A W)(1 + W^\dagger A W + \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書き直すことができる。ただし  $A = i\pi \frac{1}{H - E_F}$  である。したがって、

$$S(E_F) = \left( 1 + i\pi W^\dagger \frac{1}{H - E_F} W \right) \left( 1 - i\pi W^\dagger \frac{1}{H - E_F} W \right)^{-1} \quad (4.6)$$

となる。ここで、 $W$  を次のように特異値分解する:

$$W = U Q \tilde{W}. \quad (4.7)$$

ただし、 $U$  は  $M \times M$  ユニタリー行列であり、 $\tilde{W}$  は  $2N \times 2N$  行列である。 $Q$  は  $M \times 2N$  行列であり、

$$Q = M \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}^{2N} \right\} \quad (4.8)$$

という形をしている<sup>||</sup>。さらに、 $2N \times 2N$  行列

$$\tilde{H} = Q^T U^\dagger (H - E_F)^{-1} U Q \quad (4.9)$$

<sup>||</sup>通常、特異値分解とは  $W = U \Sigma V$  で、 $U$  が  $M \times M$  ユニタリー行列、 $V$  が  $N \times N$  ユニタリー行列、 $\Sigma$  が特異値 (正数) を対角要素とする行列である。式 (4.7) では特異値を  $V$  にかけて、 $Q$  を対角要素 1 の行列にした。そのため  $\tilde{W}$  はユニタリー行列ではない。

を定義すると、 $S$  行列はこれらの新しい行列を用いて

$$S(E_F) = \left(1 + i\pi \tilde{W}^\dagger \tilde{H} \tilde{W}\right) \left(1 - i\pi \tilde{W}^\dagger \tilde{H} \tilde{W}\right)^{-1} \quad (4.10)$$

と書くことができる。なお、式(4.9)で $Q^T$ と $Q$ をかける操作は $M \times M$ 行列 $U^\dagger(H - E_F)^{-1}U$ の左上の $2N \times 2N$ 部分行列をとってくることになっている。

## 4.2 ローレンチアン・アンサンブル

式(4.10)を計算するためには、ランダム行列 $H$ の分布として、 $P(H)$ 以外に $P(H^{-1})$ も必要になる。 $P(H^{-1})$ をガウシアン・アンサンブルのランダム行列から直接計算するのは難しいが、以下でみるようにローレンチアン・アンサンブルのランダム行列を経由すると可能になる。

パラメータ $(\lambda, \varepsilon)$ のローレンチアン・アンサンブルとは、下のような分布関数で与えられるランダム行列のアンサンブルのことである：

$$P(H)dH = \frac{1}{Z_\beta^{(Lo)}} \det [\lambda^2 + (H - \varepsilon)^2]^{-(\beta M - 2 - \beta)/2} dH. \quad (4.11)$$

$H$ の固有値 $\{x_i\}$ の分布は

$$P(\{x_i\}) \prod_i dx_i = \frac{1}{Z_\beta^{(Lo)}} \prod_i [\lambda^2 + (x_i - \varepsilon)^2]^{-(\beta M - 2 - \beta)/2} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_i dx_i \quad (4.12)$$

である。ここで $Z_\beta^{(Lo)}$ と $Z_\beta'^{(Lo)}$ は規格化定数である。

### 4.2.1 ローレンチアン・アンサンブルの性質 (1)

$P(H^{-1})$ はパラメータ $(\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \varepsilon^2}, \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\lambda^2 + \varepsilon^2})$ のローレンチアン・アンサンブルになる。このことは次のようにしてわかる。

$H^{-1}$ は $H$ と同じユニタリー行列で対角化されるので $\{1/x_i\}$ の分布を考えればよい。 $y_i = 1/x_i$ として、

$$\begin{aligned} P(\{y_i\}) &\propto \prod_i \left[ \lambda^2 + \left( \frac{1}{y_i} - \varepsilon \right)^2 \right]^{-(\beta M - 2 - \beta)/2} \prod_{i < j} \left| \frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} \right|^\beta \prod_i \frac{dx_i}{dy_i} dy_i \\ &= \prod_i \left\{ [\lambda^2 y_i^2 + (1 - \varepsilon y_i)^2]^{-(\beta M - 2 - \beta)/2} y_i^{(\beta M - 2 - \beta)/2} \right\} \\ &\quad \times \prod_{i < j} \left\{ |y_i - y_j|^\beta \frac{1}{|y_i y_j|^\beta} \right\} \prod_i y_i^{-2} dy_i \\ &= \prod_i [\tilde{\lambda}^2 + (y_i - \tilde{\varepsilon})^2]^{-(\beta M - 2 - \beta)/2} \prod_{i < j} |y_i - y_j|^\beta \prod_i dy_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

となり、確かめられた。

ローレンチアン・アンサンプルの以下の2つの性質は証明なしで用いることにする。詳細は文献 [6] を参照していただきたい。

#### 4.2.2 ローレンチアン・アンサンプルの性質 (2)

$M \times M$  行列  $H$  がパラメータ  $(\lambda, \varepsilon)$  のローレンチアン・アンサンプルならば、 $H$  の左上の  $M_1 \times M_1$  小行列もパラメータ  $(\lambda, \varepsilon)$  のローレンチアン・アンサンプルになる:

$$H = \left( \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{c} M_1 \\ \boxed{\text{grid}} \end{array}}^{M_1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_M \end{array} \right) \quad M. \quad (4.14)$$

#### 4.2.3 ローレンチアン・アンサンプルの性質 (3)

ローレンチアン・アンサンプルとガウシアン・アンサンプルとの間には次のような関係がある。

一般にランダム行列  $H$  の固有値の  $n$  点相関関数は

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \int P(\{x_i\}) dx_{n+1} \dots dx_M \quad (4.15)$$

と定義される。固有値を平均準位間隔  $\Delta = \lambda\pi/M$  で規格化して  $\xi_i = x_i/\Delta$  とする。すると  $M \rightarrow \infty$  のときに次のような関数  $Y_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$  を定義できる:

$$Y_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta^n \rho_n(\xi_1 \Delta, \dots, \xi_n \Delta). \quad (4.16)$$

実はこの関数  $Y_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$  が、同じ  $\beta$  を持つローレンチアン・アンサンプルとガウシアン・アンサンプルで等しいことが知られている。それぞれの  $n$  について  $n$  点相関関数が等しいのであるから、 $M \rightarrow \infty$  の極限ではローレンチアン・アンサンプルを使って求めた結果がガウシアン・アンサンプルから得られる結果と一致するというわけである。

以上のことから、以下では  $H$  として  $\beta = 1, 2, 4$  のガウシアン・アンサンプルの代わりに  $\beta = 1, 2, 4$  のローレンチアン・アンサンプルを使って話しを進める。

### 4.3 $\tilde{W}_{ij} = \pi^{-1/2} \delta_{ij}$ の場合

まずはじめに、 $2N \times 2N$  行列  $\tilde{W}$  が特定の簡単な形をしている場合を考察しよう。具体的には

$$\tilde{W}_{ij} = \pi^{-1/2} \delta_{ij} \quad (4.17)$$

とする。この場合の  $S$  行列を  $S_0(E_F)$  とすると、式 (4.10) より

$$S_0(E_F) = \frac{1 + i\tilde{H}}{1 - i\tilde{H}} \quad (4.18)$$

を得る。この  $S_0(E_F)$  の物理的意味は §4.5 で明らかになる。 $S_0(E_F)$  は  $\tilde{H}$  と同じユニタリー行列  $V$  で対角化される。したがって、 $\tilde{H}$  の固有値を  $\{\tilde{x}_i\}$  とすると

$$V^\dagger \tilde{H} V = \text{diag}(\tilde{x}_i), \quad V^\dagger S_0(E_F) V = \text{diag}\left(\frac{1 + i\tilde{x}_i}{1 - i\tilde{x}_i}\right) \quad (4.19)$$

となる。 $S_0(E_F)$  の固有値を  $\{e^{i\theta_i}\}$  とすると

$$e^{i\theta_i} = \frac{1 + i\tilde{x}_i}{1 - i\tilde{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2N) \quad (4.20)$$

という関係が得られる。

ここで、 $H$  はパラメータ  $(\lambda, 0)$  のローレンチアン・アンサンブルに属するとする。すると、 $H - E_F$  はパラメータ  $(\lambda, E_F)$  のローレンチアン・アンサンブルに属する。さらに §4.2.1 の結果を使うと、 $(H - E_F)^{-1}$  はパラメータ  $(\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + E_F^2}, \tilde{E}_F = \frac{E_F}{\lambda^2 + E_F^2})$  のローレンチアン・アンサンブルに属する。ユニタリー行列で変換してもユニバーサリティクラスは変わらないので、 $U^\dagger (H - E_F)^{-1} U$  もパラメータ  $(\tilde{\lambda}, \tilde{E}_F)$  のローレンチアン・アンサンブルに属する。最後に §4.2.2 の結果を使うと、 $\tilde{H} = Q^T U^\dagger (H - E_F)^{-1} U Q$  がパラメータ  $(\tilde{\lambda}, \tilde{E}_F)$  のローレンチアン・アンサンブルに属することがわかる。

したがって、式 (4.20) の変数変換によって、 $\{\theta_i\}$  の分布は以下のように求まる：

$$P(\{\theta_i\}) \propto \prod_{1 \leq i < j \leq 2N} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^\beta \prod_{j=1}^{2N} |1 - \sigma^* e^{i\theta_j}|^{-(2\beta N + 2 - \beta)}. \quad (4.21)$$

ただし

$$\sigma = \frac{1 - \tilde{\lambda} - i\tilde{E}_F}{1 + \tilde{\lambda} + i\tilde{E}_F} \quad (4.22)$$

である。固有値の分布が求まったので、式 (4.17) の場合の  $S$  行列の分布が求まる。まず

$$|1 - \sigma^* e^{i\theta_j}|^{-(2\beta N + 2 - \beta)} = \left\{ |\sigma|^2 \left[ 1/\sigma + (i e^{-i\theta_j/2})^2 \right] \left[ 1/\sigma^* + (i e^{i\theta_j/2})^2 \right] \right\}^{-(2\beta N + 2 - \beta)/2} \quad (4.23)$$

に注意する。すると、 $i e^{-i\theta_j/2}$  は  $i\sqrt{S_0}$  の固有値であるから、式 (4.11) と式 (4.12) より

$$\begin{aligned} P(S_0) &\propto \det \left[ (1/\sigma) + \left( i\sqrt{S_0^\dagger} \right)^2 \right]^{-(2\beta N+2-\beta)/2} \det \left[ (1/\sigma)^* + \left( i\sqrt{S_0} \right)^2 \right]^{-(2\beta N+2-\beta)/2} \\ &\propto \det \left[ (1 - \sigma S_0^\dagger)(1 - \sigma^* S_0) \right]^{-(2\beta N+2-\beta)/2} \\ &= |\det(1 - \sigma^* S_0)|^{-(2\beta N+2-\beta)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

と求まる。つまり

$$P_0(S_0) \propto \left| \det(1 - \bar{S}_0^\dagger S_0) \right|^{-(2\beta N+2-\beta)}, \quad (\bar{S}_0)_{ij} = \sigma \delta_{ij} \quad (4.25)$$

である。

#### 4.4 一般の $\tilde{W}$ の場合

式 (4.10) は、式 (4.18) で定義される  $S_0$  を使って、次のように書き直すことができる:

$$S(E_F) = r + t' S_0 (1 - r' S_0)^{-1} t. \quad (4.26)$$

ただし、

$$\begin{aligned} r &= (1 - \pi \tilde{W}^\dagger W)(1 + \pi \tilde{W}^\dagger W)^{-1}, \\ r' &= -\tilde{W}(1 - \pi \tilde{W}^\dagger \tilde{W})(1 + \pi \tilde{W}^\dagger \tilde{W})^{-1} \tilde{W}^{-1}, \\ t &= 2\sqrt{\pi} \tilde{W}(1 + \pi \tilde{W}^\dagger \tilde{W})^{-1}, \\ t' &= 2\sqrt{\pi}(1 + \pi \tilde{W}^\dagger \tilde{W})^{-1} \tilde{W}^\dagger \end{aligned} \quad (4.27)$$

である。このように書き直す意味は §4.5 で明らかになるが、ここではまず、 $S$  の分布  $P(S)$  について調べてみよう。 $S_0$  の分布は既に式 (4.25) でわかっている。 $S_0$  から  $S$  への変換のヤコビアンを  $J(S)$  とすると、

$$P(S) dS = P_0(S_0) J(S) dS \quad (4.28)$$

である。 $J(S)$  は具体的には

$$J(S) = \left( \frac{\det(1 - r^\dagger r)}{|\det(1 - r^\dagger S)|^2} \right)^{(2\beta N+2-\beta)/2} \quad (4.29)$$

と書けるので (参考文献 [8][9])、 $S$  の分布は

$$P(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-(2\beta N+2-\beta)} \quad (4.30)$$

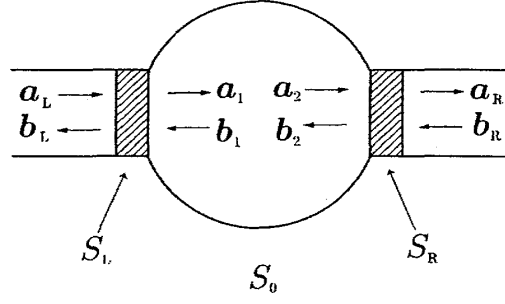


図 4: 量子ドット系の  $S$  行列を  $S_L$  と  $S_0$ 、 $S_R$  の 3 つに分ける。

と求まる。ただし、

$$\bar{S} = \frac{1 - \pi(\tilde{\lambda} + i\tilde{E}_F)W^\dagger W}{1 + \pi(\tilde{\lambda} + i\tilde{E}_F)W^\dagger W} \quad (4.31)$$

である。これに  $\lambda = M\Delta/\pi$  (§4.2.3) を代入して  $M \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\bar{S} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M\Delta - \pi^2 W^\dagger W}{M\Delta + \pi^2 W^\dagger W} \quad (4.32)$$

となる。つまり、全系の  $S$  行列の分布  $P(S)$  は、平均が式 (4.32) で与えられるポアソン・カーネルになっている。

#### 4.5 開放量子ドット系の $S$ 行列— $S$ 行列からのアプローチ

図 4 にあるように、我々が今考えている開放量子ドット系の  $S$  行列を、左のリードの  $S$  行列  $S_L$ 、ドットの  $S$  行列  $S_0$ 、右のリードの  $S$  行列  $S_R$  の 3 つ

$$S_L = \begin{pmatrix} r_L & t'_L \\ t_L & r'_L \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t'_0 \\ t_0 & r'_0 \end{pmatrix}, \quad S_R = \begin{pmatrix} r_R & t'_R \\ t_R & r'_R \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

に分ける。このとき、全系の  $S$  行列は

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} r_L & 0 \\ 0 & r_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_L & 0 \\ 0 & t'_R \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_R \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} t'_L & 0 \\ 0 & t'_R \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} r'_L & 0 \\ 0 & r'_R \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_R \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} r_L & 0 \\ 0 & r_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_L & 0 \\ 0 & t'_R \end{pmatrix} S_0 \left[ 1 + \begin{pmatrix} r'_L & 0 \\ 0 & r'_R \end{pmatrix} S_0 + \dots \right] \begin{pmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_L & 0 \\ 0 & r_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_L & 0 \\ 0 & t'_R \end{pmatrix} S_0 \frac{1}{1 - \begin{pmatrix} r'_L & 0 \\ 0 & r'_R \end{pmatrix} S_0} \begin{pmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$



と書ける。ここでの  $S$  と  $S_0$  との関係は、§4.4での  $S$  と  $S_0$  との関係式 (4.26) と同じである。これは式 (4.26) の物理的意味を与える。つまり式 (4.26) の  $S_0$  はドットの  $S$  行列、式 (4.27) の係数は左右のリードの  $S$  行列と解釈できる。

ところで、一般に  $\bar{S} = 0$  のポアソン・カーネル、つまり  $P(S) = \text{const.}$  のときに、 $S$  の属するクラスを円アンサンブル (Circular Ensemble) という。このとき、 $S$  の固有値  $\{e^{i\theta_i}\}$  の分布  $P(\{\theta_i\})$  は  $S$  から  $e^{i\theta_i}$  へのヤコビアン の項のみとなり、

$$P(\{\theta_i\}) \propto \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^\beta \quad (4.35)$$

で与えられる。

ここで、式 (4.33) の行列  $S_0$  が円アンサンブルに属すると仮定しよう。すると、ここでの  $S_0$  の分布は、§4.3の式 (4.25) で  $\bar{S}_0 = 0$  としたものになっている。したがって、§4.4の式 (4.28) と式 (4.29) が使えて、 $S$  の分布は

$$\begin{aligned} P(S)dS &= P_0(S_0)J(S)dS \\ &\propto \left( \frac{\det(1 - r^\dagger r)}{|\det(1 - r^\dagger S)|^2} \right)^{(2\beta N + 2 - \beta)/2} dS \\ &\propto |\det(1 - r^\dagger S)|^{-(2\beta N + 2 - \beta)} dS \\ &= \left| \det \left[ 1 - \begin{pmatrix} r_L & 0 \\ 0 & r_R \end{pmatrix}^\dagger S \right] \right|^{-(2\beta N + 2 - \beta)} dS \end{aligned} \quad (4.36)$$

となる。

式 (4.34) の右辺第1項に着目しよう。 $t_L t_L^\dagger$  の固有値を  $\{T_i^{(L)}\}$  とする。そして、固有値を並べた行列  $T_L = \text{diag}(\{T_i^{(L)}\})$  を定義する。 $T_R$  も同様にして定義する。散乱行列のユニタリー性より  $t_L t_L^\dagger + r_L r_L^\dagger = 1$  などの性質があることに注意すると、 $U, U', V, V'$  をユニタリー行列として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_L & 0 \\ 0 & r_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U\sqrt{1-T_L}V & 0 \\ 0 & U'\sqrt{1-T_R}V' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

と特異値分解することができる。これを用いて、式 (4.36) を次のように書き直すことがで

きる:

$$\begin{aligned}
& P(S) dS \\
& \propto \left| \det \left[ 1 - \begin{pmatrix} V^\dagger & 0 \\ 0 & V'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^\dagger & 0 \\ 0 & U'^\dagger \end{pmatrix} S \right] \right|^{-(2\beta N+2-\beta)} dS \\
& = \left| \det \left[ 1 - \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^\dagger & 0 \\ 0 & U'^\dagger \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} V^\dagger & 0 \\ 0 & V'^\dagger \end{pmatrix} \right] \right|^{-(2\beta N+2-\beta)} dS \\
& = \left| \det \left[ 1 - \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} S' \right] \right|^{-(2\beta N+2-\beta)} dS \\
& = \left| \det \left[ 1 - \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} S' \right] \right|^{-(2\beta N+2-\beta)} dS'. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

ただし、

$$S' = \begin{pmatrix} U^\dagger & 0 \\ 0 & U'^\dagger \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} V^\dagger & 0 \\ 0 & V'^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

である。最後の式変形では  $dS$  が Haar 測度でありユニタリー変換で不変であることを用いた。式 (4.38) はポアソン・カーネルの形をしている。実際に  $\bar{S}$  は

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} r_L & \\ & r_R \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_L} & \\ & \sqrt{1-T_R} \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

である。ここで  $T_L(T_R)$  は左側(右側)のリードからドットへの透過確率に対応している。もし左右のリードが完全透過する理想的なリードであるなら、 $T_L = T_R = 1$  なので  $\bar{S} = 0$  となり、 $P(S)$  は円アンサンブルとなる。したがって式 (4.38) で与えられるポアソン・カーネルは、リードによる反射がある場合も含めた円アンサンブルの拡張とみなすことができる。

§4.4 と §4.5 の結果をまとめよう。§4.4 では  $H$  をローレンチアン・アンサンブルと仮定して、全体のハミルトニアン  $H_{\text{tot}}$  から全体の  $S$  行列のポアソン・カーネル  $P(S)$  を求めた。これが §1.2 の 1 番目の疑問に対する答えである。ここで  $\bar{S}$  は式 (4.32) のように  $H_{\text{tot}}$  中の  $W$  によって表されていた。一方 §4.5 では、 $S_0$  を円アンサンブルにとったときも全体の  $S$  行列の分布  $P(S)$  はポアソン・カーネルになることを示した。ここで  $\bar{S}$  は  $S_L$  と  $S_R$  で表されている。

§4 の前半でやったように、ランダムハミルトニアンから出発した場合には、 $T_L$  と  $T_R$  は  $W$  を用いて書くことができる。 $T_L$  と  $T_R$  をまとめて

$$T_n = \begin{cases} T_n^{(L)} & 1 \leq n \leq N \\ T_{n-N}^{(R)} & N+1 \leq n \leq 2N \end{cases} \tag{4.41}$$

と定義し、 $W^\dagger W$  の固有値を  $W_n$  とする。このとき、

$$T_n = \frac{4M\pi^2 W_n}{(M\Delta + \pi^2 W_n)^2} \quad (4.42)$$

であることがわかる。一方、ここでは式 (4.37) のように  $T_L$  と  $T_R$  は  $S_L$  や  $S_R$  で表されている。つまり、式 (4.42) は  $H_{\text{tot}}$  の中の  $W$  と、 $S_L$  や  $S_R$  の対応を表す式である。

結局、 $H$  をガウシアン・アンサンブルで与えるアプローチと、 $S_0$  を円アンサンブルで与えるアプローチは等価であり、どちらのアプローチをとっても全系の  $S$  行列の分布  $P(S)$  はポアソン・カーネルで与えられることがわかった。以下の計算では、 $S_0$  の分布が円アンサンブルに従うと仮定して話を進める。

ちなみに、通常  $N \ll M$  であるから、数値計算の際には  $M \times M$  行列の  $H_{\text{tot}}$  を用いるより、 $2N \times 2N$  の  $S$  を用いる方が便利である。 $H_{\text{tot}}$  の普遍性は  $\beta$  を通して  $S$  に入ってくる（具体的には表 2 のようになる）。

## 5 コンダクタンスの期待値・分散

ここでは、§1.2 の 2 番目の疑問に答えることで、いよいよコンダクタンスを計算する。そのために、透過係数の分布関数に関する Dyson の積分方程式を用いる。

### 5.1 $S$ 行列とコンダクタンス

§4.5 でやったのと同様にして、全系の透過行列  $t$  について、 $tt^\dagger$  の固有値を  $\{t_i\}$  とする。すると、式 (1.11) より

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_i t_i \quad (5.1)$$

と書ける。したがって、コンダクタンスの平均は

$$\langle G \rangle = \frac{e^2}{h} \langle \text{tr } tt^\dagger \rangle = \frac{e^2}{h} \int dS \sum_i t_i P(S) \quad (5.2)$$

である。ここで  $S$  は円アンサンブルに従うとする。これは式 (4.1) で  $\bar{S} = 0$  とすることだが、式 (4.36) で  $r_L = r_R = 0$  とすることでもある。つまり左右の導線は一切反射がない伝導体とすることに相当する。

$U, V, U', V'$  をユニタリ行列として、 $T = \text{diag}(\{t_i\})$  と定義すると、 $S$  を次のように極分解することができる:

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-T} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & \sqrt{1-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

ただし、 $U, V, U', V'$  は  $\beta = 1$  のとき

$$U' = U^T, \quad V' = V^T, \quad (5.4)$$

$\beta = 4$  のとき

$$U' = U^R, \quad V' = V^R, \quad (5.5)$$

という対称性がある。ただし、 $U^R$  と  $V^R$  はそれぞれ  $U$  と  $V$  の双対 (3.30) である。 $S$  から  $T$  への変換

$$[U, V, U', V' \text{ の自由度}] P(T) dT = P(S) J(T) dT \quad (5.6)$$

を考える。変換のヤコビアンは

$$J(T) = \prod_{i < j} |t_i - t_j|^\beta \prod_k t_k^{-1+\beta/2} \quad (5.7)$$

である (参考文献 [11][12])。また、円アンサンブルを仮定しているので  $P(S) = \text{const.}$  である。したがって、規格化定数を  $Z_t$  として

$$P(T) dT = \frac{1}{Z_t} \prod_{i < j} |t_i - t_j|^\beta \prod_k t_k^{-1+\beta/2} dt_1 \dots dt_N \quad (5.8)$$

と求まる。ゆえに

$$\langle G \rangle = g \frac{e^2}{h} \sum_{i=1}^{N'} \left( \prod_{j=1}^{N'} \int_0^1 dt_j \right) t_i \prod_{j < k} |t_j - t_k|^\beta \prod_\ell t_\ell^{-1+\beta/2} \frac{1}{Z_t}. \quad (5.9)$$

上の式で縮退の因子  $g$  に注意する必要がある。我々は §3 で議論した 3 つのクラスのハミルトニアンを考えているが、各々のクラスでその固有値が縮退している場合、それに応じて  $\{t_i\}$  も縮退する。オーソゴナルクラスとスピン回転対称性のあるユニタリークラスの場合、 $\{t_i\}$  はスピンに関して二重に縮退している。一方、シンプレクティッククラスの場合もクラマース縮退によってやはり二重縮退している。これらの場合は  $g = 2$  となることに注意する。また上の式で縮退を除いた独立な  $t_i$  の数を  $N'$  とした。

ここで、各チャンネルの透過係数を  $t_i = \frac{1}{1+\lambda_i}$  と変数変換する。 $0 \leq t_i \leq 1$  なので  $0 \leq \lambda_i < \infty$  である。すると  $\{\lambda_i\}$  の分布は

$$\begin{aligned} P(\{\lambda_i\}) &= \frac{1}{Z_\lambda} e^{-\beta W} \\ W &= \sum_{i < j} u(\lambda_i, \lambda_j) + \sum_i V(\lambda_i) \\ u(\lambda_i, \lambda_j) &= -\ln |\lambda_i - \lambda_j| \\ V(\lambda_i) &= \left[ N' - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \right] \ln(1 + \lambda_i) \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。 $Z_\lambda$  は規格化定数である。これは、あたかも粒子間相互作用  $u$  とポテンシャル  $V$  のもとでの粒子のボルツマン分布のように見える。

## 5.2 Dyson の積分方程式

先ほど導入した  $\{\lambda_i\}$  を用いて、コンダクタンスの平均値は

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= g \frac{e^2}{h} \sum_i \left( \prod_{j=1}^{N'} \int_0^\infty d\lambda_j \right) \frac{1}{1 + \lambda_i} P(\{\lambda_k\}) \\ &= g \frac{e^2}{h} \int_0^\infty d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{1 + \lambda}\end{aligned}\quad (5.11)$$

と書ける。ここで、 $\rho(\lambda)$  は 1 点関数

$$\rho(\lambda) = \left\langle \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle \quad (5.12)$$

$$= N' \int P(\{\lambda_i\}) d\lambda_2 \dots d\lambda_{N'} \quad (5.13)$$

である。つまり、 $\{\lambda_i\}$  が式 (5.10) のようにカノニカル分布するときの  $\{\lambda_i\}$  の密度がわかればよい。

$\rho(\lambda)$  に対する積分方程式を得るために、まず  $P(\{\lambda_i\})$  を  $\lambda_1$  で微分してみよう:

$$\frac{\partial P(\{\lambda_i\})}{\partial \lambda_1} = -\beta P(\{\lambda_i\}) \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}. \quad (5.14)$$

上式の両辺に  $N'$  を掛けて  $\lambda_2, \dots, \lambda_{N'}$  で積分すると

$$\frac{d\rho}{d\lambda} + \beta \rho \frac{dV}{d\lambda} - \beta N' \int P(\{\lambda_i\}) \left( \frac{d}{d\lambda} \sum_{j=2}^{N'} \ln |\lambda - \lambda_j| \right) d\lambda_2 \dots d\lambda_{N'} = 0 \quad (5.15)$$

となる。そこで、2 点相関関数を

$$\rho_2(\lambda_1, \lambda_2) = N'(N' - 1) \int P(\{\lambda_i\}) d\lambda_3 \dots d\lambda_{N'} \quad (5.16)$$

と定義すると、 $P(\{\lambda_i\})$  が  $\lambda_j$  と  $\lambda_k$  の入れ換えに対して対称であることに注意して

$$\frac{d\rho}{d\lambda} + \beta \rho \frac{dV}{d\lambda} + \beta \int d\lambda' \frac{\rho_2(\lambda, \lambda')}{\lambda' - \lambda} = 0 \quad (5.17)$$

と書ける。実際、式 (5.17) の第 3 項は

$$\begin{aligned}& \int d\lambda' \frac{1}{\lambda - \lambda'} \left[ N'(N' - 1) \int P(\{\lambda_i\}) d\lambda_3 \dots d\lambda_{N'} \right] \\ &= N'(N' - 1) \int P(\{\lambda_i\}) \frac{1}{\lambda - \lambda'} d\lambda' d\lambda_3 \dots d\lambda_{N'} \\ &= N' \int P(\{\lambda_i\}) \sum_{j=2}^{N'} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} d\lambda_2 \dots d\lambda_{N'} \\ &= N' \int P(\{\lambda_i\}) \left( \frac{d}{d\lambda} \sum_{j=2}^{N'} \ln |\lambda - \lambda_j| \right) d\lambda_2 \dots d\lambda_{N'}\end{aligned} \quad (5.18)$$

となり式 (5.15) に帰着することがわかる。

ここで近似を導入する。2 点相関関数を

$$\rho_2(\lambda, \lambda') = \rho(\lambda)\rho(\lambda') [1 - y(\lambda, \lambda')], \quad (5.19)$$

$$y(\lambda, \lambda') = Y(s, z), \quad s = \frac{\lambda + \lambda'}{2}, \quad z = \lambda' - \lambda \quad (5.20)$$

と書いて関数  $y(\lambda, \lambda')$  と  $Y(s, z)$  を導入する。 $\lambda$  と  $\lambda'$  が十分に離れていれば、この 2 点間の相関はほとんどないと考えられるので、以後、 $z$  の 2 次以上の項は無視することにする。すると、関数  $Y(s, z)$  に関して次の 2 つの性質が導ける:

$$\int dz z^n Y(s, z) = 0 \quad (n \text{ は奇数}), \quad (5.21)$$

$$\int dz Y(\lambda, z) \simeq \frac{1}{\rho(\lambda)}. \quad (5.22)$$

式 (5.21) は  $Y(s, z)$  が  $z$  に関して偶関数であることから明らかである。式 (5.22) は以下のようにして示せる。

まず、式 (5.16) の両辺を  $\lambda_2$  で積分すると

$$\int \rho_2(\lambda, \lambda') d\lambda' = (N' - 1)\rho(\lambda) \quad (5.23)$$

を得る。一方、式 (5.19) の両辺を  $\lambda'$  で積分すると

$$\int \rho(\lambda)\rho(\lambda')[1 - y(\lambda, \lambda')]d\lambda' = N'\rho(\lambda) - \rho(\lambda) \int \rho(\lambda')y(\lambda, \lambda')d\lambda' \quad (5.24)$$

を得る。これら 2 つの式より

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho(\lambda')y(\lambda, \lambda')d\lambda' \\ &= \int \rho(\lambda + z)Y(\lambda + z/2, z)dz \\ &\simeq \rho(\lambda) \int Y(\lambda, z)dz \end{aligned} \quad (5.25)$$

がわかり、これから式 (5.22) が求まる。最後の表式を得るために、 $\rho(\lambda + z)$  と  $y(\lambda + z/2, z)$  をそれぞれ  $z$  でテーラー展開して、 $z$  の 2 次以上の項は無視した。また、 $z$  の 1 次の項は式 (5.21) により 0 になることを用いた。

式 (5.17) の第 3 項の計算を考えよう。式 (5.19) から

$$\begin{aligned} \beta \int d\lambda' \frac{\rho_2(\lambda, \lambda')}{\lambda' - \lambda} &= \beta \int \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \rho(\lambda)\rho(\lambda')[1 - y(\lambda, \lambda')] \\ &= \beta\rho(\lambda) \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda' - \lambda} - \beta\rho(\lambda) \int \rho(\lambda')y(\lambda, \lambda') \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \end{aligned} \quad (5.26)$$

となる。式 (5.21)、(5.22) を用いて上式右辺第 2 項は次のように見積もることができる:

$$\begin{aligned}
 [\text{第 2 項}] &= \beta \rho(\lambda) \int \rho(\lambda+z) Y(\lambda+z/2, z) \frac{dz}{z} \\
 &= \beta \rho(\lambda) \int \left[ \rho(\lambda) + z \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} + \dots \right] \left[ Y(\lambda, z) + \frac{\partial Y(\lambda, z)}{\partial \lambda} \left( \frac{z}{2} \right) + \dots \right] \frac{dz}{z} \\
 &= \beta \rho(\lambda) \int \left[ \frac{\rho(\lambda) Y(\lambda, z)}{z} + \frac{\rho(\lambda)}{2} \frac{\partial Y(\lambda, z)}{\partial \lambda} + \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} Y(\lambda, z) + \dots \right] dz \\
 &\simeq \beta \rho(\lambda) \int \left[ \frac{\rho(\lambda)}{2} \frac{\partial Y(\lambda, z)}{\partial \lambda} + \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} Y(\lambda, z) \right] dz \\
 &\simeq \frac{\beta \rho^2(\lambda)}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int Y(\lambda, z) dz \right] + \beta \rho(\lambda) \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \int Y(\lambda, z) dz \\
 &= \frac{\beta \rho^2(\lambda)}{2} \left[ \frac{-1}{\rho^2(\lambda)} \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \right] + \beta \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \\
 &= \frac{\beta}{2} \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda}.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

したがって、

$$\beta \int d\lambda' \frac{\rho_2(\lambda, \lambda')}{\lambda' - \lambda} = \beta \rho(\lambda) \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda' - \lambda} - \frac{\beta}{2} \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \tag{5.28}$$

である。これを式 (5.17) に代入して両辺を  $\beta \rho(\lambda)$  で割ると

$$\left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \right) \frac{d \ln \rho}{d\lambda} + \frac{dV}{d\lambda} + \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda' - \lambda} = 0 \tag{5.29}$$

となる。左辺第 3 項は主値積分とする。これを  $\lambda$  について積分すると、

$$\int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \ln \rho(\lambda) = V(\lambda) + \text{const.} \tag{5.30}$$

を得る。式 (5.30) は Dyson の積分方程式と呼ばれる。

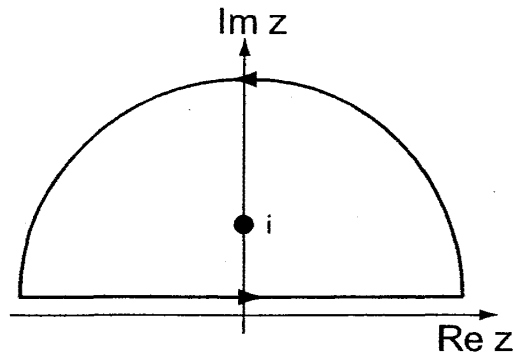
式 (5.29) の各項のオーダーを考えてみよう。式 (5.10)、(5.13) より、 $V(\lambda_i) \sim \mathcal{O}(N')$ 、 $\rho(\lambda') \sim \mathcal{O}(N')$  なので、式 (5.29) の左辺第 1 項は  $\mathcal{O}(\ln N')$ 、第 2 項は  $\mathcal{O}(N')$ 、第 3 項は  $\mathcal{O}(N')$  となる。 $N'$  が十分大きくて第 1 項が無視できるとすると、 $\rho(\lambda)$  の分布は、よく知られた Wigner の半円則に帰着する。

### 5.3 コンダクタンスの期待値

さて、 $\rho(\lambda)$  が従う積分方程式がわかったので、式 (5.11) に戻ってコンダクタンスの期待値を計算する。そのために、 $\rho(\lambda)$  と  $V(\lambda)$  を  $N'$  で展開する:

$$\rho(\lambda) = N' \rho_0(\lambda) + N'^0 \delta \rho(\lambda) + \dots, \tag{5.31}$$

$$V(\lambda) = N' V_0(\lambda) + N'^0 \delta V(\lambda) + \dots. \tag{5.32}$$

図 5: 式 (5.36) で使う積分経路  $\Gamma_i$ 。

展開係数を順番に求めていく。まず、式 (5.10) より、式 (5.32) の係数についてはすぐわかり、

$$V_0(\lambda) = \ln(1 + \lambda), \quad \delta V(\lambda) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \ln(1 + \lambda) \quad (5.33)$$

である。

次に、式 (5.31) の第一項の係数  $\rho_0(\lambda)$  を求める。式 (5.29) で  $N' \rightarrow \infty$  とすると

$$\int_0^\infty d\lambda' \frac{\rho_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (5.34)$$

を得る。Hilbert 変換の公式によれば、この積分方程式の解は

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\pi(1 + \lambda)\sqrt{\lambda}} \quad (5.35)$$

である。確かに、式 (5.35) の  $\rho_0(\lambda)$  を式 (5.34) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\lambda' \frac{1}{\lambda - \lambda'} \left[ \frac{1}{\pi(1 + \lambda')\sqrt{\lambda'}} \right] \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda'_1}{(\lambda'^2_1 - \lambda)(\lambda'^2_1 + 1)} \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{dz}{(z + \sqrt{\lambda})(z - \sqrt{\lambda})(z + i)(z - i)} - i \frac{1}{(z + \sqrt{\lambda})(z + i)(z - i)} \Big|_{z=\sqrt{\lambda}} \\ & \quad - i \frac{1}{(z - \sqrt{\lambda})(z + i)(z - i)} \Big|_{z=-\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (5.36)$$

である。ただし上の式で 1、2 行目の積分は主値積分であり、3 行目の  $\Gamma_i$  は、図 5 で表されるような  $z = i$  を反時計周りに回る経路を表す。また、式変形の途中で  $\lambda'^2_1 = \lambda'$  と変換した。



さらに、式 (5.31) の第二項の係数  $\delta\rho(\lambda)$  を求めよう。式 (5.29) より

$$\int_0^\infty d\lambda' \frac{\delta\rho}{\lambda - \lambda'} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{d \ln \rho_0}{d\lambda} = \frac{d\delta V}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{1}{1 + \lambda} \quad (5.37)$$

を得る。したがって

$$\int_0^\infty d\lambda' \frac{\delta\rho}{\lambda - \lambda'} = \frac{1}{4\lambda} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \quad (5.38)$$

という積分方程式が得られる。これを解くと

$$\delta\rho = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \delta(\lambda - 0^+) \quad (5.39)$$

がわかる。

以上より、結局

$$\rho(\lambda) \simeq N' \frac{1}{\pi(1 + \lambda)\sqrt{\lambda}} + N'^0 \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \delta(\lambda - 0^+) \quad (5.40)$$

となる。これを式 (5.11) に代入するとコンダクタンスの期待値は

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= g \frac{e^2}{h} \left[ \frac{N'}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(1 + \lambda)^2 \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \int_0^\infty \frac{1}{1 + \lambda} \delta(\lambda - 0^+) d\lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N'}\right) \right] \\ &= g \frac{e^2}{h} \left[ \frac{N'}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N'}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

と求まる。したがって、

$$\langle G \rangle \simeq g \frac{e^2}{h} [g_0 + g_1] \quad (5.42)$$

と書ける。ただし、

$$g_0 = \frac{N'}{2}, \quad g_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \quad (5.43)$$

である。

$g \frac{e^2}{h} g_0$  はコンダクタンスのモードの数に比例する部分であり、古典的なオーム則に従うコンダクタンスを表している。一方  $g \frac{e^2}{h} g_1$  はそれからの量子補正を表す。 $g_1$  が、リードの形状やフェルミエネルギーで決まる  $N'$  に依存せず、系の対称性から決まる  $\beta$  のみに依存する普遍的な量であることは注目に値する。

また、 $g_1$  の符号は系の対称性によって異なる。 $\beta = 1$  (オーソゴナルクラス) のときは  $g_1 < 0$  である。これは量子効果によってコンダクタンスが抑制されるということであり、アンダーソン (弱) 局在の効果を表している。 $\beta = 2$  (ユニタリークラス) のときは  $g_1 = 0$  となる。これは、磁場などの時間反転対称性を破る効果によって局在の効果が弱められたことを意味する。 $\beta = 4$  (シンプレティッククラス) のときは  $g_1 > 0$  となる。これは、量子効果によってむしろコンダクタンスが増大することを意味し、反局在の効果を表している。

## 5.4 コンダクタンスの分散

次に、コンダクタンスの分散を計算する:

$$\begin{aligned}
 \text{var } G &= \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 \\
 &= \left( g \frac{e^2}{h} \right)^2 \left[ \left\langle \sum_{ij} \frac{1}{1+\lambda_i} \frac{1}{1+\lambda_j} \right\rangle - \left\langle \sum_i \frac{1}{1+\lambda_i} \right\rangle \left\langle \sum_j \frac{1}{1+\lambda_j} \right\rangle \right] \\
 &= \left( g \frac{e^2}{h} \right)^2 \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\lambda' \frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{1+\lambda'} K(\lambda, \lambda'). \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

ただし、

$$K(\lambda, \lambda') = \left\langle \sum_{ij} \delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda' - \lambda_j) \right\rangle - \rho(\lambda) \rho(\lambda') \tag{5.45}$$

である。 $\rho(\lambda)$  の定義式 (5.12) より、

$$\rho(\lambda) = \frac{\int d\lambda \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i) \exp \left[ -\beta \left( \sum_{ij} u(\lambda_i, \lambda_j) + \sum_i V(\lambda_i) \right) \right]}{\int d\lambda \exp \left[ -\beta \left( \sum_{ij} u(\lambda_i, \lambda_j) + \sum_i V(\lambda_i) \right) \right]} \tag{5.46}$$

なので、変分をとることにより、

$$K(\lambda, \lambda') = -\frac{1}{\beta} \frac{\delta \rho(\lambda)}{\delta V(\lambda')} \tag{5.47}$$

という関係があることに着目する。

$K(\lambda, \lambda')$  の主要項を求めたい。そのために、Dyson の積分方程式 (5.30) で  $\ln \rho$  の項を無視すると、

$$V(\lambda) + \int_0^\infty d\lambda' u(\lambda, \lambda') \rho(\lambda') = \text{const.} \tag{5.48}$$

を得る。ただし  $u(\lambda, \lambda') = -\ln |\lambda - \lambda'|$  である。式 (5.48) を変分すると、

$$\delta V + \int_0^\infty d\lambda' u(\lambda, \lambda') \delta \rho(\lambda') = 0 \tag{5.49}$$

である。ここで、 $u^{-1}(\lambda', \lambda'')$  を

$$\int d\lambda' u(\lambda, \lambda') u^{-1}(\lambda', \lambda'') = \delta(\lambda - \lambda'') \tag{5.50}$$

として定義すると、

$$\delta \rho(\lambda) = - \int_0^\infty d\lambda' u^{-1}(\lambda, \lambda') \delta V(\lambda') \tag{5.51}$$

となる。したがって、これと式 (5.47) より  $K(\lambda, \lambda')$  が求まり、

$$K(\lambda, \lambda') = \frac{1}{\beta} u^{-1}(\lambda, \lambda') \tag{5.52}$$

となる。

つまり式 (5.50)

$$-\int_0^\infty d\lambda'' \ln |\lambda - \lambda''| u^{-1}(\lambda'', \lambda') = \delta(\lambda - \lambda') \quad (5.53)$$

を  $u^{-1}$  に関して解けばよい。そのために、 $f(\lambda'', \lambda')$  を

$$\frac{\partial}{\partial \lambda''} \frac{\partial}{\partial \lambda'} f(\lambda'', \lambda') = u^{-1}(\lambda'', \lambda') \quad (5.54)$$

と定義すると、式 (5.53) は

$$\int_0^\infty d\lambda'' \frac{f(\lambda'', \lambda')}{\lambda'' - \lambda} = \theta(\lambda' - \lambda) \quad (5.55)$$

と書き直せる。 $\theta(\lambda)$  は階段関数である。上式は  $\lambda'' = x''^2$ ,  $\lambda = x^2$  と変数変換することにより、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{2x'' dx''}{x''^2 - x^2} f(x''^2, \lambda') &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx'' \frac{2|x''|}{x''^2 - x^2} f(x''^2, \lambda') \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx'' \left( \frac{1}{x'' - x} + \frac{1}{x'' + x} \right) \frac{x''}{|x''|} f(x''^2, \lambda') \\ &= \theta(\lambda' - x^2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

となる。したがって、

$$\int_{-\infty}^\infty dx'' \frac{1}{x'' - x} \left[ \frac{x''}{|x''|} f(x''^2, \lambda') \right] = \theta(\lambda' - x^2) \quad (5.57)$$

である。これは Hilbert 変換の形になっているので、逆変換により

$$\begin{aligned} f(x''^2, \lambda') \frac{x''}{|x''|} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\theta(\lambda' - x^2)}{x - x''} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\sqrt{\lambda'}}^{\sqrt{\lambda'}} \frac{dx}{x - x''} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda'} - x''}{\sqrt{\lambda'} + x''} \right| \end{aligned} \quad (5.58)$$

と求まる。これより、

$$u^{-1}(\lambda, \lambda') = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda'} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} \right| \quad (5.59)$$

が得られる。式 (5.52) と式 (5.59) を式 (5.44) に代入することにより、

$$\begin{aligned} \text{var } G &= \left( g \frac{e^2}{h} \right)^2 \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\lambda' \frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{1+\lambda'} \left( \frac{-1}{\beta\pi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda'} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} \right| \\ &= \left( g \frac{e^2}{h} \right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^2} \int_0^\infty d\lambda' \frac{1}{1+\lambda'} \left( \frac{-1}{\beta\pi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda'} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda'}} \right| \\ &= \left( g \frac{e^2}{h} \right)^2 \left( \frac{1}{\beta\pi^2} \right) \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{(1+\lambda)^2} \int_0^\infty d\lambda' \frac{1}{\sqrt{\lambda'}(1+\lambda')(\lambda - \lambda')} \end{aligned} \quad (5.60)$$

となる。ただし上の式の2番目の等号では、 $\lambda$ について部分積分を行った。右辺の $\lambda'$ についての積分は、式(5.36)と同じ形なので

$$[\lambda' \text{の積分}] = \frac{\pi}{1+\lambda} \quad (5.61)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \text{var } G &= \left(g \frac{e^2}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta\pi}\right) \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda+1)^3} \\ &= \left(g \frac{e^2}{h}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta\pi}\right) \int_0^\pi d\theta \left[\frac{1}{8} + \frac{\cos 2\theta}{8}\right] \\ &= \left(g \frac{e^2}{h}\right)^2 \frac{1}{8\beta} \end{aligned} \quad (5.62)$$

を得る。なお、式変形の途中で $\lambda = \tan^2 \frac{\theta}{2}$ とおいて積分を変形した。

特筆すべきことに、コンダクタンスの分散は $N^0$ 、すなわち $N'$ によらない項が主要項となっている。これは、コンダクタンスの分散が系の詳細にはよらず、その対称性のみに依存するということを表している。メソスコピック系におけるこのような現象は普遍コンダクタンス揺らぎと呼ばれている。

こうして、このノートの一歩の目標であった、コンダクタンスの平均値(5.42)と分散(5.62)が求まった。

## 6 このノートの先にあるもの

このノートで紹介した開放量子ドットのコンダクタンス以外にも、ランダム行列はメソスコピック系の研究で活発に使われており、ランダム行列理論は日々進歩している。その全てをここで紹介することは不可能であるが、最後に以下の2点に触れて、筆を擱きたいと思う。

### 6.1 量子細線

このノートでは0次元の量子ドットを扱ったが、次の問題としては1次元の量子細線が考えられる。量子細線のコンダクタンスの計算は、量子ドットのコンダクタンスの計算よりも難しい。というのも、1次元ではアンダーソン局在がおこるが、ランダム行列はスペクトルが連続であるために(例えばガウシアン・アンサンブルの場合はよく知られているようにスペクトルは半円則に従う)、孤立した固有値を持つ局在状態を記述できない。

そこで図6にあるように、長さ $L$ の量子細線において、一方の端の $\delta L$ の微小な幅の部分だけをまず考え、そこではランダム行列が正しい結果を与えるとする。そこから、逐次的に系のサイズを他方の端まで伸ばしていくという作業が必要になる。このときに現れる逐次方程式はDMPK方程式と呼ばれる。

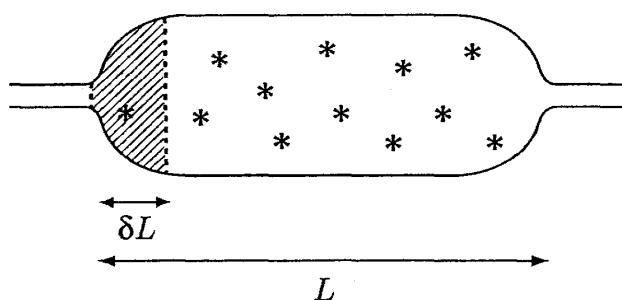


図 6: 量子細線の一部をランダム行列で記述する。

## 6.2 新しい対称性

このノートではランダム行列のユニバーサリティクラスとして、オーソゴナル、ユニタリー、シンプレクティックの3種類を紹介した。しかし、現在ではその他に7つ、計10個のユニバーサリティクラスが知られている。

ホッピングがランダムな系や磁場がランダムな系を考えると、ハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

の形になる。ここで、 $C$ は一般に長方形行列である。 $H$ のある1つの固有値と固有ベクトルを

$$H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

とする。このとき、

$$H \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

が得られるので、 $H$ の固有値には常に、符号の異なるペアが現れる<sup>\*\*</sup>。この対称性はカイラル対称性 (Chiral symmetry) と呼ばれる。カイラル対称性を持つ系について、時間反転対称性 (TR) の有無とスピン回転対称性 (SR) の有無を考慮すると、カイラル・オーソゴナル、カイラル・ユニタリー、カイラル・シンプレクティックの3種類に分類できる。

<sup>\*\*</sup>長方形行列  $C$  の正値特異値分解を

$$C = U \Sigma V^\dagger \quad (U \text{ と } V \text{ はユニタリー行列、 } \Sigma \text{ は正値対角行列})$$

とすると、エルミート行列  $H$  はユニタリー行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} U & U \\ V & -V \end{pmatrix}$$

を使って、

$$U^\dagger H U = \begin{pmatrix} \Sigma & \\ & -\Sigma \end{pmatrix}$$

と対角化され、固有値が正負ペアになっていることがわかる。

また、超伝導ギャップを与えるボゴリューボフ・ドジャン (Bogoliubov-de Gennes) 方程式に現れるハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & -A^T \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

という形をしている。ただし、 $A$ はエルミート行列、 $B$ は反対称行列である。この場合には、時間反転対称性 (TR) が破れている場合にも、スピン回転対称性 (SR) の有無を区別しなければならない。したがって、このような系については4つのユニバーサリティクラスが存在する。

結局、このノートで紹介した3つの基本的なユニバーサリティクラスの他に7種類のユニバーサリティクラスがあり、合計10種類のユニバーサリティクラスが得られる。

## 謝辞

この講義は、科学技術振興機構 (JST) の戦略的創造研究推進事業 (CREST) における研究領域「量子情報処理システムの実現を目指した新技術の創出」の支援により行われた。心より感謝の念を表したい。

## 参考文献

### 1 イントロダクション

§1.1 の Landauer 公式については、例えば以下の教科書がある。

- [1] Y. イムリー、メソスコピック物理入門、吉岡書店、2000 年

§1.2 で述べたアプローチのレビューとしては以下の論文がある。

- [2] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69** (1997) 731-808

### 2 ハミルトニアンの対称性

§2 で述べたハミルトニアンの対称性については、例えば以下の教科書がある。

- [3] J. J. Sakurai、現代の量子力学、吉岡書店、1989 年

### 3 ランダム行列アンサンブル

§3 のランダム行列アンサンブルについて、以下の本を挙げておく。特に、§3.1 で扱ったヤコビアン の計算については文献 [5] を参照されたい。

- [4] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, 1991

- [5] 永尾太郎、ランダム行列の基礎、東京大学出版会、2005 年

### 4 ランダム $S$ 行列

§4 のランダム  $S$  行列については、P. W. Brouwer の論文 [6] を挙げておく。特に、§4.2 と §4.3 の計算については [6] を参照されたい。また、式 (4.4) の導出については [7] を参照されたい。式 (4.29) の導出については [8] と [9] を挙げておく。§4.4 で導入した円アンサンブルについては [10] をご覧いただきたい。

- [6] P. W. Brouwer, Phys. Rev. B **51** (1995) 16878-16884

- [7] C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, *Shell-model approach to nuclear reactions*, Amsterdam ; London : North-Holland Pub. Co. 1969

- [8] L.K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*, American mathematical society, providence, 1963

[9] W. A. Friedman and P. A. Mello, Ann. Phys. (N. Y.) **161** (1985) 276-302

[10] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 140-156

## 5 コンダクタンスの期待値・分散

§5.1 の式 (5.7) の導出については [11] と [12] を参照していただきたい。§5.2 の Dyson の積分方程式については [13] をご覧いただきたい。§5.3 のコンダクタンスの期待値については [11] と [14]、§5.4 のコンダクタンスの分散については [15] を参照のこと。

[11] H. U. Baranger and P. A. Mello, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 142-145

[12] R. A. Jalabert, J. -L. Pichard and C. W. J. Beenakker, Europhys. Lett. **24** (1993) 1-6

[13] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **13** (1970) 90-97

[14] R. A. Jalabert, J. L. Pichard and C. W. J. Beenakker, Europhys. Lett. **27** (1994) 255-260

[15] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1155-1158

## 6 このノートの先にあるもの

§6.1 の量子細線については、以下の文献を挙げておく。

[16] O. N. Dorokhov, JETP Lett. **36** (1982) 318-321

[17] P. A. Mello, P. Pereyra and N. Kumar, Ann. Phys. (N. Y.) **181** (1988) 290-317

§6.2 で紹介したボゴリューボフ・ドジャン方程式のハミルトニアンについては、[18] を参照していただきたい。またランダム行列におけるユニバーサリティクラスの分類の数学的側面については [19] を挙げておく。

[18] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55** (1997) 1142-1161

[19] M. Caselle and U. Magnea, Phys. Rep. **394** (2004) 41-156